جداءات العطالة ومجسم العطالة

1. جداء العطالة:

إذا كان لدينا نقطة مادية كتلتها m ومستويين متعامدين Q و R ، نسمي بالتعريف جداء كتلة النقطة المادية ببعديها عن المستويين بجداء العطالة P_{QR} ، وإذا كان لدينا مجموعة نقاط مادية فإن جداء عطالة المجموعة بالنسبة للمستويين هو مجموع جداءات عطالة نقاطها. وبصورة خاصة إذا كان لدينا مجموعة نقاط مادية $A_1, A_2, \dots, A_n$ احداثياتها بالنسبة لجملة محاور متعامدة $OXYZ$ هي $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$ وكتلها $m_1, m_2, \dots, m_n$ فـ جداءات عطالتها بالنسبة للمستويات الاحداثية:

$$P_{oxz,oyz} = P_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i$$

$$P_{oxy,oxz} = P_{yz} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i$$

$$P_{oxy,oyz} = P_{xz} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i$$

وإذا كانت المجموعة المادية جسماً صلباً فإن جداءات العطالة تعطى بالشكل:

$$P_{xy} = \int_V xydm$$

$$P_{yz} = \int_V yzdm$$

$$P_{xz} = \int_V xzdm$$

نلاحظ أن:

1) إن جداءات العطالة هو كمية جبرية قد تكون موجبة أو سالبة أو صفراً حسب توزع نقاط المجموعة المادية بالنسبة للمستويات الإحداثية.

2) إذا كانت جميع نقاط المجموعة المادية أو الجسم تقع في مستو واحد وليكن oxy فعندئذ يكون $z = 0$ وبالتالي فإن $P_{xz} = P_{yz} = 0$

3) إذا كان أحد المستويات الإحداثية وليكن oxy مثلاً مستوي تناظر للمجموعة المادية عندئذ يكون $P_{xz} = P_{yz} = 0$

البرهان:

من تعريف جداء العطالة فإن:

$$P_{xz} = \int_V xzdm$$

ومن التناظر بالنسبة للمستوي oxy فإن نصف نقاط الجسم لها راقم z والنصف الآخر من نقاط الجسم المناظرة للأولى لها الراقم $(-z)$ لذلك يمكن أن نكتب:

$$P_{xz} = \int_{\frac{V}{2}} xzdm + \int_{\frac{V}{2}} (-z)xdm = \int_{\frac{V}{2}} xzdm - \int_{\frac{V}{2}} xzdm = 0$$

$$P_{yz} = \int_{\frac{V}{2}} yzdm + \int_{\frac{V}{2}} (-z)ydm = \int_{\frac{V}{2}} yzdm - \int_{\frac{V}{2}} yzdm = 0$$

4- إذا كان أحد المحاور الإحداثية وليكن oz مثلاً محور تناظر فيكون: $P_{xz} = P_{yz} = 0$.

البرهان:

بما أن oz محور تناظر فإن كل نقطة من الجسم (x, y, z) لها نظيرتها $(-x, -y, z)$ ويكون:

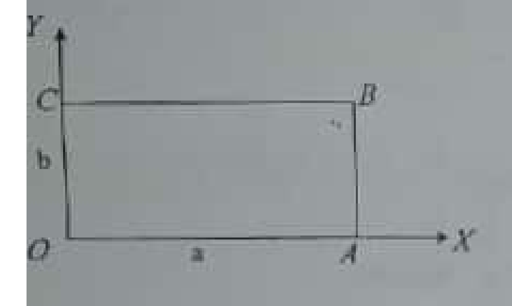
$$P_{xz} = \int_{\frac{V}{2}} xzdm + \int_{\frac{V}{2}} (-x)zdm = \int_{\frac{V}{2}} xzdm - \int_{\frac{V}{2}} xzdm = 0$$

$$P_{yz} = \int_{\frac{V}{2}} yzdm + \int_{\frac{V}{2}} (-y)zdm = \int_{\frac{V}{2}} yzdm - \int_{\frac{V}{2}} yzdm = 0$$

مثال11:

أوجد جداءات العطالة لصفيحة مستطيلة متجانسة بالنسبة لمحورين منطبقين على ضلعي الصفيحة وكتلتها M.

الحل:



$$P_{xy} = \rho \int xyds = \rho \int_0^a \int_0^b xydxdy = \rho \int_0^a xdx \int_0^b ydy = \frac{\rho a^2 b^2}{4} = \frac{Mab}{4}$$

وبما أن الصفيحة واقعة في المستوي oxy فإن $P_{xz} = P_{yz} = 0$

2. تعريف المحاور الأساسية للعطالة:

إذا كان لدينا جسم صلب وجملة المحاور الإحداثية المتماسكة معه $OXYZ$ فنقول إن هذه المحاور هي محاور أساسية للعطالة (أو عن الجملة أنها جملة أساسية للعطالة) إذا كانت جداءات العطالة P_{xy}, P_{yz}, P_{xz} معدومة. ويمكن أن يكون ل المحاور هو محور أساسي للعطالة. مثلاً المحور oz محور أساسي للعطالة إذا كان $P_{xz} = P_{yz} = 0$.

ملاحظة: كل محور تناظر هندسي للجسم المتجانس هو محور أساسي للعطالة. وذلك لو أن المحور oz مثلاً هو محور تناظر هندسي للجسم عندئذ يكون $P_{xz} = P_{yz} = 0$ وبالتالي فهو محور أساسي للعطالة.

ملاحظة: إذا كان للجسم الصلب المتجانس محور تناظر هندسي، فإن عزمي عطالته بالنسبة للمحورين المعامدين لمحور التناظر الهندسي متساويان بشرط أن لا يكون الجسم صفيحة مستوياً أو سلكاً مستوياً.

ملاحظة: إذا لم يكن الجسم متناظر هندسياً بالنسبة لمحور ما مثل oz ووجدنا أن عزمي عطالة هذا الجسم بالنسبة للمحورين المعامدين للمحور oz متساويان، عندئذ نقول عن الجسم أنه متناظر ديناميكياً بالنسبة للمحور oz، كما ندعو المحور oz بمحور تناظر ديناميكي للجسم.

3. نظرية هويغنز الثانية:

إن جداء العطالة لجسم صلب أو مجموعة مادية بالنسبة للمستويات الإحداثية تساوي جداء العطالة بالنسبة لمستويات مارة بمركز الكتل وتوازي المستويات الإحداثية مضافاً إليها جداء عطالة مركز الكتل باعتباره نقطة كتلتها هي كتلة المجموعة المادية أو الجسم الصلب، (على اعتبار أن مركز الكتل غير منطبق على مبدأ الجملة الإحداثية). أي:

$$P_{xy} = MX_cY_c + P_{Cxy}$$

البرهان:

1. إذا المجموعة المادية تشكل جسم صلب:

نفرض جسم صلب S وأن $OXYZ$ هي جملة إحداثية ديكارتية قائمة وأن $CXYZ$ هي جملة إحداثية مركزها مركز كتل الجسم $C(X_c, Y_c, Z_c)$ و بحيث أن:

$$CX//OX, CY//OY, CZ//OZ$$

لو أخذنا جسم عنصري dm يقع في النقطة A التي إحداثياتها في الجملة $OXYZ$ هي $A(X, Y, Z)$ وإحداثياتها في الجملة $CXYZ$ هي $A(x_c, y_c, z_c)$ عندئذ حسب تعرف جداء العطالة فإن P_{xy} يعطى بالشكل:

$$P_{xy} = \int_V XYdm$$

وحسب علاقة شال فإن: $\overline{OA} = \overline{OC} + \overline{CA}$ نسقط هذه العلاقة على المحاور الإحداثية OX, OY, OZ

$$X = X_c + x_c$$
$$Y = Y_c + y_c$$
$$Z = Z_c + z_c$$

$$P_{xy} = \int_V (X_c + x_c)(Y_c + y_c)dm =$$

$$= \int_V (X_cY_c + Y_cx_c + X_cy_c + y_cx_c)dm$$

$$= \int_V X_cY_cdm + \int_V Y_cx_cdm + \int_V X_cy_cdm + \int_V y_cx_cdm$$

$$= X_cY_c\int_V dm + Y_c\int_V x_cdm + X_c\int_V y_cdm + \int_V y_cx_cdm$$

$$= MX_cY_c + 0 + 0 + P_{Cxy}$$

وبالتالي فإن:

$$P_{xy} = MX_cY_c + P_{Cxy}$$

2. إذا المجموعة المادية تشكل مجموعة من النقاط المادية:

نفرض لدينا مجموعة من النقاط المادية $A_1, A_2, \dots, A_n$ كتلها $m_1, m_2, \dots, m_n$ ولدينا الجملة الإحداثية القائمة $OXYZ$ و $CXYZ$ جملة محاور احداثية مركزها C مركز كتل المجموعة المادية بحيث أن:

$$CX//OX, CY//OY, CZ//OZ$$

ولتكن $C(X_c, Y_c, Z_c)$ إحداثيات C بالنسبة للجملة $OXYZ$ ولتكن (x_i, y_i, z_i) إحداثيات النقاط بالنسبة الجملة $CXYZ$ ولتكن (X_i, Y_i, Z_i) احداثيات النقاط في الجملة $OXYZ$. عندئذ حسب تعريف جداء العطالة P_{xy} يكون:

$$P_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i X_i Y_i$$

وحسب علاقة شال فإن: $\overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA_i}$ نسقط هذه العلاقة على المحاور الإحداثية OX, OY, OZ:

$$X_i = X_c + x_i$$
$$Y_i = Y_c + y_i$$
$$Z_i = Z_c + z_i$$

$$P_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i X_i Y_i = \sum_{i=1}^{n} m_i (X_c + x_i)(Y_c + y_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} m_i [X_c Y_c + X_c y_i + x_i Y_c + x_i y_i]$$
$$= X_c Y_c \sum_{i=1}^{n} m_i + X_c \sum_{i=1}^{n} m_i y_i + Y_c \sum_{i=1}^{n} m_i x_i + \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i$$

أن: $\sum_{i=1}^{n} m_i = M$ وحسب تعريف مركز الكتل فإن $\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{CA_i} = 0$ وبالتالي:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i y_i = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i = 0$$

$$P_{xy} = M X_c Y_c + \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i = M X_c Y_c + P_{Cxy}$$

بنفس الطريقة نجد أن:

$$P_{xz} = M X_c Z_c + P_{Cxz}$$

$$P_{zy} = M Z_c Y_c + P_{Czy}$$

<u>مثال 12:</u>

كان بالإمكان في المثال السابق الاعتماد على نظرية هويغنز الثانية لإيجاد عزوم العطالة وذلك بأخذ محاور تمر من مركز كتل الصفيحة الذي احداثياته $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0)$ فنجد:

$$P_{xy} = M X_c Y_c + P_{Cxy}$$

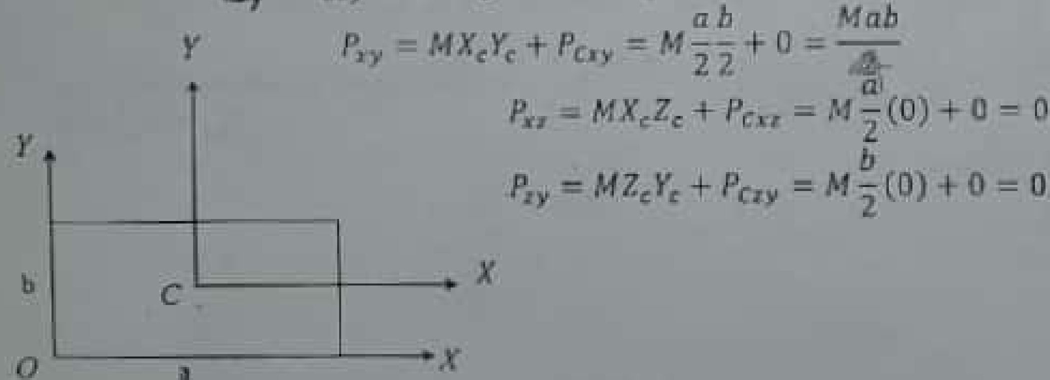
بما أن CX محور تناظر هندسي للصفيحة فهو محور أساسي للعطالة وبالتالي فإن $P_{Cxz} = P_{Cxy} = 0$

بما أن CY محور تناظر هندسي للصفيحة فهو محور أساسي للعطالة وبالتالي فإن $P_{Czy} = P_{Cxy} = 0$

$$P_{xy} = M X_c Y_c + P_{Cxy} = M \frac{a}{2}\frac{b}{2} + 0 = \frac{Mab}{4}$$

$$P_{xz} = M X_c Z_c + P_{Cxz} = M \frac{a}{2}(0) + 0 = 0$$

$$P_{zy} = M Z_c Y_c + P_{Czy} = M \frac{b}{2}(0) + 0 = 0$$



من هنا نلاحظ أنه من تعريف المحور الأساسي للعطالة وبما أن $P_{zy} = P_{xz} = 0$ فإن المحور OZ هو محور أساسي للعطالة وهو محور تناظر ديناميكي وليس محور تناظر هندسي.

مثال 13:

لتكن OAB صفيحة مثلثية متجانسة قائمة في O ومتساوية الساقين، طول ضلعيها a وكتلتها المطلوب:

1) حساب عزوم العطالة للصفيحة بالنسبة لكل من المحاور المارة من ضلعيها والمحور المعامد لها والمار من

2) احسب جداءات العطالة للصفيحة.

الحل:

نعتبر الصفيحة واقعة في المستوي OXY وأن ضلعيها القائمتين منطبقين على المحورين OX و OY والمحور Z عمودي على الصفيحة

1) عزوم العطالة:

$$I_x = \rho \int (z^2 + y^2)\, ds = \rho \int (y^2)\, ds$$

$$0 \le x \le a, 0 \le y \le a - x$$

$$I_x = \rho \int_0^a \int_0^{a-x} y^2 dy dx = \rho \int_0^a [\frac{y^3}{3}]_0^{a-x} dx = \rho \int_0^a \left[\frac{(a-x)^3}{3}\right] dx = \rho [\frac{(a-x)^3}{3}]_0^a$$
$$= \frac{\rho a^4}{12} = \frac{Ma^2}{6}$$

$$I_y = \rho \int_0^a \int_0^{a-x} x^2 dy dx = \rho \int_0^a x^2 [y]_0^{a-x} dx = \rho \int_0^a [x^2(a-x)] dx = \frac{\rho a^4}{12} = \frac{Ma^2}{6}$$

$$I_o = I_z = I_x + I_y = \frac{Ma^2}{6} + \frac{Ma^2}{6} = \frac{Ma^2}{3}$$

نلاحظ أن $I_x = I_y$ وبالتالي فإن المحور OZ هو محور تناظر ديناميكي الصفيحة ولكنه ليس محور تناظر هندسي.

عزوم العطالة بالنسبة للمستويات الإحداثية:

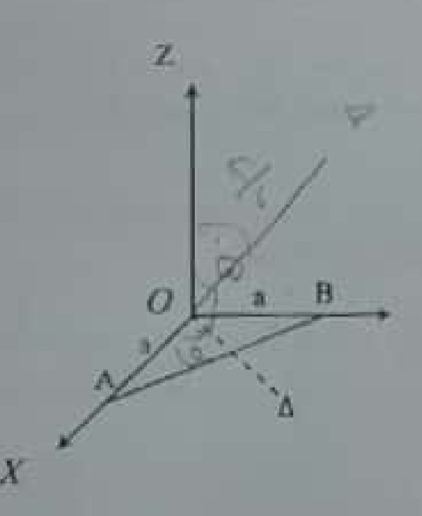
$$I_{xy} = 0, I_{xz} = \frac{Ma^2}{6}, I_{zy} = I_y = \frac{Ma^2}{6}$$

2) جداءات العطالة:

$$P_{xy} = \rho \int xy ds = \rho \int_0^a \int_0^{a-x} xy dx dy = \frac{\rho a^4}{24} = \frac{Ma^2}{12}$$

وبما أن الصفيحة واقعة في المستوي OXY إذاً:

$$P_{xz} = P_{yz} = 0$$



$\theta = \frac{\pi}{2}$

$\psi = \frac{\pi}{4}$

4. عزم عطالة مجموعة مادية بالنسبة لمحور مار من مبدأ الإحداثيات:

نعلم أن بعد النقطة A_i عن محور Δ مار من مبدأ الإحداثيات O ومتجه واحدته $\vec{u}$ هو $|\overrightarrow{OA_i} \times \vec{u}|$
و إن بعد النقطة A_i عن المستوي P مار من O والمعين بشعاع الناظم $\vec{N}$ هو $|\overrightarrow{OA_i}.\vec{N}|$

ليكن لدينا المحور Δ المار من مبدأ الإحداثيات O والمعين بشعاع الواحدة $\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$ حيث $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ ولتكن مجموعة النقاط المادية A_i حيث m_i كتلها ذات الإحداثيات (x_i, y_i, z_i). من تعريف عزم عطالة المجموعة بالنسبة لمحور نجد:

$$I_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i (\overrightarrow{OA_i} \times \vec{u})^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i ((x_i\vec{i} + y_i\vec{j} + z_i\vec{k}) \times (\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}))^2$$

$$\overrightarrow{OA_i} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = (y_i\gamma - \beta z_i)\vec{i} + (z_i\alpha - x_i\gamma)\vec{j} + (x_i\beta - y_i\alpha)\vec{k}$$

$$(\overrightarrow{OA_i} \times \vec{u})^2 = (y_i\gamma - \beta z_i)^2 + (z_i\alpha - x_i\gamma)^2 + (x_i\beta - y_i\alpha)^2$$
$$= \alpha^2(y_i^2 + z_i^2) + \beta^2(x_i^2 + z_i^2) + \gamma^2(x_i^2 + y_i^2) - 2\alpha\beta x_i y_i - 2\alpha\gamma x_i z_i - 2\gamma\beta z_i y_i$$

$$I_\Delta = \alpha^2 \sum_{i=1}^{n} m_i(y_i^2 + z_i^2) + \beta^2 \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + z_i^2) + \gamma^2 \sum_{i=1}^{n} m_i(y_i^2 + x_i^2)$$
$$-2\alpha\beta \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i - 2\alpha\gamma \sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i - 2\gamma\beta \sum_{i=1}^{n} m_i z_i y_i$$

$$I_\Delta = \alpha^2 I_x + \beta^2 I_y + \gamma^2 I_z - 2\alpha\beta P_{xy} - 2\alpha\gamma P_{xz} - 2\gamma\beta P_{zy}$$

أي أن عزم عطالة مجموعة مادية بالنسبة لمحور يتعين بدلالة عزوم العطالة بالنسبة للمحاور الإحداثية وجداءات العطالة بالنسبة للمستويات الإحداثية.

مثال 14:

في المثال السابق أوجد عزم عطالة الصفيحة بالنسبة لمحور Δ محمول على منصف الزاوية القائمة O في مستوي الصفيحة OXY.

الحل:

إن متجه الوحدة للمستقيم هو $\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} = \cos\frac{\pi}{4}\vec{i} + \cos\frac{\pi}{4}\vec{j} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$

إذاً $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \gamma = 0$

$$I_\Delta = (\frac{1}{\sqrt{2}})^2\frac{Ma^2}{6} + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2\frac{Ma^2}{6} - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{Ma^2}{12} = \frac{Ma^2}{12}$$